$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\cdot 2^{n-1}$ と $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\,{}_n\mathrm{C}_k = n(n+1)\cdot 2^{n-2}$ の導き方

A. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\cdot 2^{n-1}$ の導き方

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k$$

↓両辺を x で微分

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k x^{k-1}$$

これと $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k x^{k-1} = 0\cdot{}_n\mathrm{C}_0 x^0 + \sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k x^{k-1}$ より，

$$\sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$$

よって， $x=1$ のとき， $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\cdot 2^{n-1}$

あるいは，

n 人から委員を k 人と委員長を 1 人選ぶ場合

n 人から委員を k 人を選び，さらに k 人から委員長を選ぶ方法と，

n 人から委員長を選んだ後，残り $n-1$ 人から $k-1$ 人の委員を選ぶ 2 つの方法があり，

両方の場合の数が等しいから， ${}_n\mathrm{C}_k \times k = n \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$

よって，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k &= \sum_{k=1}^{n} n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \\ &= n\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \\ &= n(1+1)^{n-1} \\ &= n\cdot 2^{n-1}\end{aligned}$$

B. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k = n(n+1)\cdot 2^{n-2}$ **の導き方**

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k$$

↓両辺を x で微分

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k x^{k-1}$$

↓両辺を x で微分し，右辺を式変形していく。

$$\begin{aligned} n(n-1)(1+x)^{n-2} &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)_n\mathrm{C}_k x^{k-2} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)_n\mathrm{C}_k x^{k-2} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k x^{k-2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k x^{k-2} \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k x^{k-2} = n(n-1)(1+x)^{n-2} + \sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k x^{k-2}$$

よって，$x=1$ のとき，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k &= n(n-1)2^{n-2} + \sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k \\ &= n(n-1)\cdot 2^{n-2} + n\cdot 2^{n-1} \\ &= n(n+1)\cdot 2^{n-2} \end{aligned}$$